Topologie Algébrique TD1

30 Septembre 2011

1 Langage de Catégorie

Exercice 1.1 (Exemples de catégories) Vérifier que les suivantes sont des catégories : décrire les objets, les morphismes et les règles de composition de morphismes :

1. $\mathfrak{Set}$: les ensembles ;
2. $\mathfrak{Cat}$: les petites catégories ;
3. $\mathfrak{Fct}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$: les foncteurs entre deux catégories $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$;
4. $\mathfrak{Gp}$: les groupes ;
5. $\mathfrak{Ab}$: les groupes abéliens ;
6. $\mathfrak{Ring}$: les anneaux unitaires ;
7. $A-\mathfrak{Mod}$: les A-modules, où A est un anneau unitaire ;
8. $\mathfrak{Alg}_k$: les k-algèbres unitaires (associatives, mais non-nécessairement commutatives), où k est un corps ;
9. $\mathfrak{Alg}_k^c$: les k-algèbres unitaires commutatives, où k est un corps ;
10. $\mathsf{Rep}_{\mathbf{C}}(G)$: les représentations complexes d'un groupe fini G ;
11. $\mathfrak{Top}$: les espaces topologiques ;
12. $\mathfrak{Top}_\bullet$: les espaces topologiques pointés ;
13. $\mathfrak{Mfd}$: les variétés différentielles ;
14. $\mathfrak{Mfd}_{\mathbf{C}}$: les variétés complexes ;
15. (les groupes de Lie), réel ou complexe ;
16. (les algèbres de Lie), réel ou complexe ;
17. $\mathfrak{Psh}(X)$: les préfaisceaux abéliens sur un espace topologique X donné ;
18. $\mathfrak{Shv}(X)$: les faisceaux abéliens sur un espace topologique X donné ;
19. (les complexes de groupe) ;
20. (les $\mathbf{R}-$espaces vectoriels topologiques) ;
21. (les espaces mesurables) ;
22. Nouveaux exemples sont bienvenus ! ! !

Exercice 1.2 En utilisant les exemples dans l'exercice précédent, donner des exemples de :

1. catégories additives ;
2. catégories abéliennes. Décrire les noyaux, conoyaux, images.

3. Sous catégories. Elles sont pleines ?

Exercice 1.3 (Exemples de foncteurs) Vérifier que les suivantes sont des foncteurs.

1. (Foncteurs d'oubli) $A-\mathfrak{Mod} \to \mathfrak{Ab} \to \mathfrak{Set}$, $\mathbf{Rep}_{\mathbf{C}}(G) \to \mathbf{C}-\mathfrak{Mod}$, $\mathfrak{Gp} \to \mathfrak{Ab}$, $\mathfrak{Mfd}_{\mathbf{C}} \to \mathfrak{Mfd}$, $\mathfrak{Top}_{\bullet} \to \mathfrak{Top} \to \mathfrak{Set}$, $\mathfrak{Shv}(X) \to \mathfrak{Psh}(X)$;
2. (Groupes de (co-)homologie, Groupes d'homotopie)
$$\pi_1 : \mathfrak{Top}_{\bullet} \to \mathfrak{Gp};$$
$$H_i, H^i : \mathfrak{Top} \to \mathfrak{Ab};$$
$$\pi_i : \mathfrak{Top}_{\bullet} \to \mathfrak{Ab}; (i \geq 2).$$
3. (Algèbre de Lie) Lie : (Groupes de Lie)→ (Algèbres de Lie)
4. (Opérations sur les faisceaux) Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques. Construire les foncteurs suivants :
$$f_* : \mathfrak{Shv}(X) \to \mathfrak{Shv}(Y);$$
$$f^{-1} : \mathfrak{Shv}(Y) \to \mathfrak{Shv}(X);$$
$$\Gamma : \mathfrak{Shv}(X) \to \mathfrak{Ab}$$

Exercice 1.4 (Exemples d'équivalences de catégories) Il faut bien distinguer la notion d'*équivalence* de catégories et celle d'*isomorphisme* de catégories.

1. D'abord, on rappelle une méthode pour établir une équivalence entre deux catégories : soit
$$F : \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}_2$$
un foncteur, supposons que F est pleinement fidèle et essentiellement surjectif, alors F est une équivalence de catégories. Construire un foncteur 'inverse'.
2. Soit k un corps. On considère la catégorie $\mathscr{C}$: les objets sont des nombres entiers positifs : $\mathbf{Obj}\,\mathscr{C} = \mathbf{N}$, et l'ensemble des morphismes entre deux entiers n et m est l'ensemble des matrices de taille $n \times m$ à coefficient dans k, et la composition des morphismes est définie par le produit des matrices. Établir une équivalence de catégorie entre $\mathscr{C}$ et la catégorie des k-espaces vectoriels de dimension finie.
3. Soit $K \subset L$ une extension finie galoisienne de corps, reformuler la théorie de Galois par une équivalence de catégories. (Attention au sens des flèches)
4. Soit G un groupe fini, on note $\mathbf{Rep}_{\mathbf{C}}(G)$ la catégorie des représentations linéaires de dimension finie de G sur $\mathbf{C}$. Établir l'équivalence de catégories entre $\mathbf{Rep}_{\mathbf{C}}(G)$ et la catégorie de $\mathbf{C}[G]$-modules de dimension finie, où $\mathbf{C}[G]$ est l'algèbre de groupe G. On note souvent cette catégorie $G-\mathfrak{Mod}$.

5. Soit $\mathscr{G}$ une algèbre de Lie complexe de dimension finie. Trouver une $\mathbf{C}$-algèbre A, telle que la catégorie des représentations de $\mathscr{G}$ de dimension finie sur $\mathbf{C}$ est équivalente à la catégorie des A-modules de dimension finie sur $\mathbf{C}$. On la note souvent $\mathscr{G} - \mathfrak{Mod}$.
6. Soit A un anneau unitaire non-commutatif, on défini un anneau A° avec les éléments, la même structure de groupe abélien, mais le produit $a * b$ dans A° est défini comme ba dans A. Établir des équivalences de catégories suivantes :
   – entre $A - \mathfrak{Mod}$ et $\mathfrak{Mod} - A^\circ$;
   – entre $A - \mathfrak{Mod} - B$ et $A \otimes B^\circ - \mathfrak{Mod}$;

Exercice 1.5 (Foncteurs adjoints) Soient $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ deux catégories, et $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$, $G : \mathscr{D} \to \mathscr{C}$ des foncteurs. Par définition, on dit que (F, G) est une paire de *foncteurs adjoints*, ou plus précisément, F est *adjoint à gauche* de G, ou bien G est *adjoint à droite* de F, s'il existe deux morphismes de foncteurs,

$$\epsilon : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathscr{D}},$$

$$\eta : \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \to G \circ F$$

tels que les morphisme induits

$$G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\epsilon} G$$

$$F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\epsilon F} F$$

sont des identités. On appelle ϵ et η les *adjonctions.*

1. Pour tout $X \in \mathrm{Obj}(\mathscr{C})$ et $Y \in \mathrm{Obj}(\mathscr{D})$, on a un isomorphisme qui est fonctoriel en X et en Y :

   $$\mathrm{Mor}_{\mathscr{D}}(F(X), Y) \simeq \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(X, G(Y)).$$

   Autrement dit, on a un isomorphisme de bi-foncteurs :

   $$\mathrm{Mor}_{\mathscr{D}}(F(-), -) \simeq \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(-, G(-)).$$

   Comment reconstruire les adjonctions à partir de cet isomorphisme ?
2. (**Isomorphisme de Cartan**) Soient $A, B \in \mathfrak{Ring}$ deux anneaux unitaires, soit $M \in A - \mathfrak{Mod} - B$ un bimodule. On considère deux foncteurs :

   $$M \otimes_B - : B - \mathfrak{Mod} \to A - \mathfrak{Mod}$$

   $$\mathrm{Hom}_A(M, -) : A - \mathfrak{Mod} \to B - \mathfrak{Mod}$$

   Montrer qu'ils font bien une paire de foncteurs adjoints.

3. (**Exemples**) En principe, on peut souvent reformuler une propriété universelle en utilisant le langage de foncteur adjoint :
(a) Donner les foncteurs adjoints à gauche des foncteurs d'oubli suivants : $\mathfrak{Ab} \to \mathfrak{Set}$, $\mathfrak{Gp} \to \mathfrak{Set}$, $\mathfrak{Top}_{\bullet} \to \mathfrak{Top}$, $\mathfrak{Top} \to \mathfrak{Set}$, $\mathfrak{Shv}(X) \to \mathfrak{Psh}(X)$, où X est un espace topologique.
(b) Donner le foncteur adjoint à gauche du foncteur qui associe une k-algèbre son groupe des éléments inversibles :
$$^{\times} : \mathfrak{Alg}_k \to \mathfrak{Gp}\,.$$
(c) Donner le foncteur adjoint à gauche du foncteur qui associe une $\mathbf{C}$-algèbre son algèbre de Lie complexe correspondante (le crochet de Lie est donné par le commutateur).
4. (**Limites projectives et limites inductives**) Soit $\mathscr{I}$ une petite catégorie, $\mathscr{C}$ une catégorie. On considère la catégorie $\mathscr{D} := \mathfrak{Fct}(\mathscr{I},\mathscr{C})$ des foncteurs de $\mathscr{I}$ vers $\mathscr{C}$. On a un foncteur
$$\underline{\ } : \mathscr{C} \to \mathscr{D} = \mathfrak{Fct}(\mathscr{I},\mathscr{C})$$
qui envoie un objet A de $\mathscr{C}$ au foncteur 'constant' $\underline{A}$ qui associe tout objet de $\mathscr{I}$ l'objet A et associe toute flèche dans $\mathscr{I}$ le morphisme $\mathbf{id}_A$.
(a) Si le foncteur $\underline{\ }$ admet un adjoint à gauche, noté $\varinjlim$, on dit que $\mathscr{C}$ admet les *limites inductives* indexées par $\mathscr{I}$. Si le foncteur $\underline{\ }$ admet un adjoint à droit, noté $\varprojlim$, on dit que $\mathscr{C}$ admet les *limites projectives* indexées par $\mathscr{I}$. Reformuler la définition de limite projective et inductive par certaine propriétés universelles.
(b) On suppose $\mathscr{I}$ est la catégorie suivante :
$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \\ \bullet & \end{tikzcd}$$
et $\mathscr{I}^{op}$ est la catégorie opposée.
Existe-t-il la limite projective ou inductive indexée par $\mathscr{I}$ ou $\mathscr{I}^{op}$, si
$$\mathscr{C} = \mathfrak{Set}, \mathfrak{Top}, \mathfrak{Ab}, \mathfrak{Gp}, \mathfrak{Alg}_k^c?$$
Décrire les limites.
(c) Si $\mathscr{I}$ est une catégorie discrète, on appelle la limite projective *produit*, et la limite inductive *coproduit*. Décrire le produit et le coproduit dans la catégorie $\mathfrak{Set}, \mathfrak{Top}, \mathfrak{Gp}, \mathfrak{Ab}, \mathfrak{Alg}_k^c$.

Exercice 1.6 (Équivalence de Morita) 1. Soit k un corps. Soient A,B deux k-algèbres (non-commutatives en générale). On se donne deux bimodules $M \in B - \mathfrak{Mod} - A$, $N \in A - \mathfrak{Mod} - B$. Supposons $M \otimes_A N \simeq B$ dans $B - \mathfrak{Mod} - B$, et $N \otimes_B M \simeq A$ dans $A - \mathfrak{Mod} - A$. Donner une équivalence de catégorie entre $A - \mathfrak{Mod}$ et $B - \mathfrak{Mod}$ en utilisant certains foncteurs de produit tensoriel avec M et N. On dit que A et B sont *Morita équivalents* par M, N.

2. Comme un exemple, montrer que A est Morita équivalent à $\mathbf{Mat}_n(A)$, et préciser M, N correspondants.
3. On suppose que A et B sont Morita équivalents par M, N comme ci-dessus, montrer que $A \otimes_k A^\circ$ et $B \otimes_k B^\circ$ sont Morita équivalents par $M \otimes_k N$ et $N \otimes_k M$. (Clarifier d'abord la structure de 'quadri-module' la-dessus).
4. Montrer que si A et B sont Morita équivalents, alors les centres ZA et ZB sont isomorphes comme k-algèbres. (Indication : quel est l'image de A sous l'équivalence de catégorie entre $A - \mathfrak{Mod} - A$ et $B - \mathfrak{Mod} - B$?)
5. Donner une preuve catégorique du fait que le centre de $\mathbf{Mat}_n(A)$ est ZA vu comme des matrices scalaires.
6. * (**Théorème de Morita**) La réciproque de 1. est vraie : on suppose que les deux catégories $A - \mathfrak{Mod}$ et $B - \mathfrak{Mod}$ sont équivalentes. Alors il existe une paire de modules $M \in B - \mathfrak{Mod} - A$, $N \in A - \mathfrak{Mod} - B$, telle que $M \otimes_A N \simeq B$ dans $B - \mathfrak{Mod} - B$, et $N \otimes_B M \simeq A$ dans $A - \mathfrak{Mod} - A$.
7. Soient A, B deux k-algèbres *commutatives*, alors $A - \mathfrak{Mod}$ est équivalente à $B - \mathfrak{Mod}$ si et seulement si A est isomorphe à B entant k-algèbres.